# Sur la définissabilité existentielle de la non-nullité dans les anneaux

À paraître dans *Algebra and Number Theory* (accepté le 19 octobre 2007)

Laurent Moret-Bailly *

IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes,
UMR 6625 du CNRS)
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex
laurent.moret-bailly@univ-rennes1.fr
http://perso.univ-rennes1.fr/laurent.moret-bailly/

**Résumé**

On étudie les anneaux (notamment noethériens) dans lesquels l'ensemble des éléments non nuls est existentiel positif (réunion finie de projections d'ensembles « algébriques »). Dans le cas noethérien intègre, on montre notamment que cette condition est vérifiée pour tout anneau qui n'est pas local hensélien, et qu'elle ne l'est pas pour un anneau local hensélien excellent qui n'est pas un corps.

Ces résultats apportent au passage une réponse à une question de Popescu sur l'approximation forte pour les couples henséliens.

**Abstract**

We investigate the rings in which the set of nonzero elements is positive-existential (i.e. a finite union of projections of "algebraic" sets). In the case of Noetherian domains, we prove in particular that this condition is satisfied whenever the ring in question is not local Henselian, while it is not satisfied for any excellent local Henselian domain which is not a field.

As a byproduct, we obtain an answer to a question of Popescu on strong approximation for Henselian pairs.

*Classification AMS :* 03C99, 13E05, 13J15, 13B40, 11U09.

*L'auteur est membre du réseau européen 'Arithmetic Algebraic Geometry' (contrat HPRN-CT-2000-00120).

# 1 Introduction

## 1.1 Définissabilité existentielle.

Si $A$ est un anneau (commutatif unitaire) et $r$ un entier naturel, un sous-ensemble $Z$ de $A^r$ est dit $[A\text{-}]$*existentiel* (resp. $[A\text{-}]$*existentiel positif*) s'il existe une formule $\phi(t_1, \ldots, t_r)$ du langage des anneaux avec symboles de constantes pour les éléments de $A$, à $r$ variables libres, sans quantificateur universel ($\forall$) (resp. et sans négation) telle que pour tout $\underline{t} \in A^r$, $\phi(\underline{t})$ soit vraie si et seulement si $\underline{t} \in Z$.

Plus explicitement, un ensemble existentiel (resp. existentiel positif) est réunion d'une famille finie (éventuellement vide, voir remarque 1.1.1 ci-dessous) d'ensembles de la forme

$$(*)\ \ \left\{ \underline{t} \in A^r \mid \exists \underline{x} \in A^n,\ F_1(\underline{t}, \underline{x}) = \cdots = F_s(\underline{t}, \underline{x}) = 0 \wedge G_1(\underline{t}, \underline{x}) \neq 0 \wedge \cdots \wedge G_u(\underline{t}, \underline{x}) \neq 0 \right\},$$

resp.

$$(**)\qquad \left\{ \underline{t} \in A^r \mid \exists \underline{x} \in A^n,\ F_1(\underline{t}, \underline{x}) = \cdots = F_s(\underline{t}, \underline{x}) = 0 \right\},$$

où les $F_j$ et les $G_j$ sont des polynômes en $r + n$ indéterminées à coefficients dans $A$.

Si $f : A^r \to A^s$ est une application polynomiale (par exemple $A$-linéaire), l'image (resp. l'image réciproque) par $f$ de tout sous-ensemble existentiel de $A^r$ (resp. de $A^s$) est existentielle, et de même pour les sous-ensembles existentiels positifs. On voit en particulier que la notion de sous-ensemble existentiel (resp. existentiel positif) a un sens dans tout $A$-module libre de rang fini, indépendamment du choix d'une base.

**1.1.1 Remarque.** Dans la définition d'un ensemble existentiel positif, la réunion de la *famille vide* d'ensembles $(**)$ donne naissance au sous-ensemble vide de $A^r$, qui est donc existentiel positif. Au niveau des formules, cette opération correspond à la *disjonction de la famille vide* de formules, qui est la constante logique « FAUX ». Il faut donc adjoindre celle-ci au langage des anneaux usuel, ce qui ne semble pas être de pratique courante en théorie des modèles.

Lorsque $A$ n'est pas nul, la constante « FAUX » est équivalente à la formule $1 = 0$, de sorte que l'on peut s'en dispenser. En revanche, si $A$ est l'anneau nul, la partie vide de $A^r$ n'est pas réunion d'une famille non vide d'ensembles $(**)$, ceux-ci n'étant jamais vides.

Le lecteur pourra, s'il y tient, revenir à la définition traditionnelle $\{+, ., 0, 1\}$ du langage des anneaux, au prix de modifications mineures (dans certains énoncés il faut se limiter aux anneaux non nuls).

## 1.2 La condition (C).

Pour $A$ donné, on peut se demander si tout ensemble existentiel dans $A^r$ est existentiel positif. Cette propriété équivaut manifestement à la condition suivante :

(C) « l'ensemble $A \setminus \{0\}$ est existentiel positif »

**1.2.1 Exemples.** Il est clair que tout anneau fini vérifie (C) (y compris l'anneau nul, vu nos conventions).

Tout corps $K$ vérifie (C) ($t \in K$ est non nul si et seulement si il existe $x \in K$ tel que $tx = 1$).

Il est aussi bien connu que $\mathbb{Z}$ vérifie (C) : par exemple, si $t \in \mathbb{Z}$, alors $t \neq 0$ si et seulement si il existe $x, y, w$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $tw = (1+2x)(1+3y)$. La même astuce montre d'ailleurs que tout anneau d'entiers algébriques vérifie (C).

L'anneau $A$ des entiers d'un corps local *ne vérifie pas* (C) : en effet, tout sous-ensemble existentiel positif de $A$ est compact, alors que $A \setminus \{0\}$ ne l'est pas. Plus généralement, un anneau topologique compact infini ne vérifie pas (C).

Il est facile de voir qu'un produit $A_1 \times A_2$ vérifie (C) si et seulement si $A_1$ et $A_2$ vérifient (C). En revanche, un *produit infini d'anneaux non nuls* ne vérifie jamais (C) (tout ensemble existentiel positif est fermé pour le produit des topologies discrètes).

### 1.3 Résultats.

Les principaux résultats de ce travail sont les suivants.

**1.3.1 Anneaux noethériens.** Soit $A$ un anneau noethérien. Alors :
- si $A$ est intègre et n'est pas local hensélien, il vérifie (C) (3.1) ;
- si $A$ est un localisé d'un anneau de Jacobson noethérien, il vérifie (C) (5.4) ;
- si $A$ est local hensélien excellent de dimension $> 0$, il ne vérifie pas (C) (4.1).

**1.3.2 Propriétés d'approximation.** Ces propriétés (notamment les résultats de [11, 6, 12, 17, 16]) jouent un rôle essentiel dans la preuve de 4.1 ; *a contrario*, on déduit de 3.1 que si un couple hensélien $(A, \mathfrak{r})$ vérifie la « propriété d'approximation forte », alors $A$ est nécessairement semi-local hensélien (sauf cas triviaux, comme $\mathfrak{r} = 0$). Ce résultat (corollaire 4.2.1) précise la réponse négative donnée par Spivakovsky [15] à une question de D. Popescu ; voir la remarque 4.2.2.

**1.3.3 Anneaux de fonctions holomorphes.** Soit $X$ un espace analytique de Stein (par exemple un fermé analytique de $\mathbb{C}^n$ ou d'un polydisque ouvert), irréductible et réduit. Alors l'anneau des fonctions holomorphes sur $X$ vérifie (C) (théorème 6.2).

### 1.4 Remarques sur les méthodes.

Les deux éléments essentiels dans la démonstration du théorème 3.1 sont le lemme 3.2, qui suppose l'existence de deux idéaux premiers ayant certaines propriétés, et le lemme 3.3 qui permet de remplacer l'anneau étudié (muni d'un idéal premier $\mathfrak{p}$) par un autre ayant deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$.

De ces deux lemmes, le premier généralise à peu de chose près l'argument utilisé plus haut pour $\mathbb{Z}$ (1.2.1, où les idéaux en question sont $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$), dont des variantes ont été maintes fois utilisées dans la littérature (voir par exemple [4] ou, pour une généralisation récente, [5], Proposition 2.3) ; l'idée du second remonte au moins à [14], Theorem 4.2.

Quant au théorème 4.1, il repose comme on l'a dit sur les propriétés d'approximation, le lien étant la proposition 4.1.1. Le lien entre la condition (C) et l'approximation était déjà connu de T. Pheidas.

On voit donc que ce travail ne contient pas d'idée essentiellement nouvelle, l'auteur s'étant seulement efforcé de systématiser les méthodes existantes.

# 2 Généralités et rappels.

## 2.1 Définissabilité.

On laisse au lecteur la démonstration du lemme 2.1.1 ci-dessous.

**2.1.1 Lemme.** *Soient $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$, $\pi : A \to A/I$ l'homomorphisme canonique.*

(i) *Si $I$ est de type fini, c'est un sous-ensemble existentiel positif de $A$.*

(ii) *On suppose que $I$ est existentiel positif dans $A$. Si $D$ est un sous-ensemble existentiel positif de $A/I$, alors $\pi^{-1}(D)$ est existentiel positif dans $A$.*
*En particulier, si $A/I$ vérifie* (C), *alors $A \setminus I$ est existentiel positif dans $A$.* ■

**2.1.2 Lemme.** *Soient $A$ un anneau, et $B$ une $A$-algèbre qui est un $A$-module libre de rang fini $d$.*

(i) *Soit $Z$ un sous-ensemble $B$-existentiel positif de $B$. Alors $Z$ est $A$-existentiel positif (dans $B$ vu comme $A$-module).*

(ii) *Si $d > 0$ et si $B$ vérifie* (C), *alors $A$ vérifie* (C).

*Démonstration:* on déduit (i) de la remarque suivante : si $F : B^r \to B$ est définie par un polynôme à coefficients dans $B$, alors $F$ est définie par $d$ polynômes (en $rd$ indéterminées) à coefficients dans $A$, une fois $B$ identifié à $A^d$ par le choix d'une base. On en déduit (ii) en prenant $Z = B \setminus \{0\}$ et en remarquant que $A \setminus \{0\}$ est image réciproque de $Z$ par l'application $A$-linéaire canonique de $A$ dans $B$, qui est injective si $d > 0$. ■

## 2.2 Anneaux locaux henséliens.

On rappelle [9, 13] qu'un anneau local $A$, de corps résiduel $k$, est dit *hensélien* si toute $A$-algèbre finie (*i.e.* de type fini comme $A$-module) est un produit d'anneaux locaux. Une définition équivalente est la suivante : pour tout polynôme unitaire $P \in A[X]$ et tout élément $\overline{x}$ de $k$ qui est racine simple de (l'image de) $P$, il existe un unique $x \in A$ relevant $\overline{x}$ et annulant $P$.

Pour utiliser efficacement la première définition, nous aurons besoin du lemme suivant :

**2.2.1 Lemme.** *Soit $A$ un anneau semi-local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$A$ est isomorphe à un produit d'anneaux locaux ;*

(ii) *tout idéal premier de $A$ est contenu dans un* unique *idéal maximal (autrement dit, tout quotient intègre de $A$ est local) ;*

(iii) *tout idéal premier minimal de $A$ est contenu dans un unique idéal maximal.*

*Démonstration :* les implications (i) $\Rightarrow$(ii) $\Leftrightarrow$(iii) sont faciles et laissées au lecteur. Supposons (iii), et montrons (i). Posons $X = \operatorname{Spec} A$, et soient $x_1, \ldots, x_r$ les points fermés de $X$ (correspondant aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ de $A$). Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons $X_i$ le fermé de $X$ réunion des composantes irréductibles contenant $x_i$. L'hypothèse (iii) signifie que $X$ est réunion *disjointe* des $X_i$, qui sont donc ouverts dans $X$. Si l'on munit chaque $X_i$ de sa structure de sous-schéma ouvert de $X$, alors $X_i$ est local de point fermé $x_i$ et s'identifie donc à $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{m}_i}$. Le fait que $X$ soit réunion disjointe des $X_i$ entraîne donc que $A \cong \prod_{i=1}^r A_{\mathfrak{m}_i}$, d'où la conclusion. ■

**2.2.2 Corollaire.** *Soit $A$ un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$A$ est hensélien ;*

(ii) *toute $A$-algèbre finie* intègre *est un anneau local.* ■

## 2.3 Anneaux excellents.

On renvoie à [8] ou [10] pour la définition des anneaux excellents. Rappelons seulement quelques propriétés :

(i) tout anneau excellent est noethérien ;

(ii) tout anneau local noethérien complet est excellent ;

(iii) si $A$ est excellent, il en est de même de toute $A$-algèbre de type fini et de tout anneau de fractions de $A$ ;

(iv) si $A$ est local excellent, il en est de même de son hensélisé ;

(v) un anneau de valuation discrète $A$ est excellent si et seulement si le corps des fractions de son complété est une extension séparable du corps des fractions de $A$.

## 2.4 Propriétés d'approximation.

Soient $A$ un anneau noethérien et $\mathfrak{r}$ un idéal de $A$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose $A(q) := A/\mathfrak{r}^q$, et l'on note $\widehat{A} = \varprojlim_{q \in \mathbb{N}} A(q)$ le séparé complété $\mathfrak{r}$-adique de $A$.

Pour toute famille finie $S = (F_j)_{j=1,\ldots,s}$ de polynômes en $r$ indéterminées $X_1, \ldots, X_r$ à coefficients dans $A$, et pour toute $A$-algèbre $B$, on posera

$$\operatorname{sol}(S, B) := \{\underline{x} \in B^r \mid F_j(\underline{x}) = 0 \text{ pour tout } j\}.$$

Il est clair que $\operatorname{sol}(S, B)$ est fonctoriel en $B$ ; il s'identifie à l'ensemble des morphismes de $A$-algèbres de $A[\underline{X}]/(F_1, \ldots, F_s)$ dans $B$.

On considérera la condition suivante (« principe de Hasse infinitésimal ») :

$\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ : « pour toute famille $S$ comme ci-dessus, si $\mathrm{sol}(S, A(q)) \neq \emptyset$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ alors $\mathrm{sol}(S, A) \neq \emptyset$ ».

**2.4.1 Remarques.** (1) Il est facile de voir que $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ implique les propriétés suivantes :

(i) $\mathfrak{r}$ est contenu dans le radical de $A$ ;

(ii) (conséquence de (i)) $A$ est $\mathfrak{r}$-adiquement séparé, *i.e.* $\bigcap_{q \in \mathbb{N}} \mathfrak{r}^q = \{0\}$ ;

(iii) pour tout idéal $J$ de $A$, $\mathrm{PHI}(A/J, (\mathfrak{r}+J)/J)$ est vérifiée ;

(iv) $(A, \mathfrak{r})$ vérifie la « propriété d'approximation » : pour $S$ comme ci-dessus, $\mathrm{sol}(S, A)$ est dense dans $\mathrm{sol}(S, \widehat{A})$ pour la topologie $\mathfrak{r}$-adique ;

(v) (conséquence de (iv)) $(A, \mathfrak{r})$ est un *couple hensélien* : si $B$ est une $A$-algèbre étale telle que $A/\mathfrak{r} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{r}B$, alors il existe un $A$-homomorphisme de $B$ dans $A$.

(2) D'autre part, $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ est vraie dès que $(A, \mathfrak{r})$ vérifie la « propriété d'approximation forte », que l'on peut formuler ainsi : pour $S$ comme ci-dessus et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $q' \geq q$ tel que $\mathrm{sol}(S, A)$ et $\mathrm{sol}(S, A(q'))$ aient même image dans $\mathrm{sol}(S, A(q))$.

(3) Lorsque $A$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, la propriété d'approximation pour $(A, \mathfrak{m})$ est en fait *équivalente* à la propriété d'approximation forte (et donc aussi à $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{m})$), d'après [11] (redémontré dans [6] par des méthodes de théorie des modèles).

(4) Enfin, lorsque $A$ est local hensélien *excellent* d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, la propriété d'approximation est vérifiée, d'après [12] (autres références : [17], [16]). Il en est donc de même de $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{m})$, et *a fortiori* de $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ pour tout idéal strict $\mathfrak{r}$. Retenons donc pour la suite :

**2.5 Théorème.** *Soient $A$ un anneau* local hensélien excellent, *et $\mathfrak{r}$ un idéal strict de $A$. Alors la condition* $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ *est vérifiée.* ∎

# 3 Anneaux noethériens intègres

Dans ce paragraphe, nous allons établir le théorème suivant :

**3.1 Théorème.** *Soit $A$ un anneau intègre noethérien. Si $A$ n'est pas local hensélien, alors $A$ vérifie* (C).

**3.2 Lemme.** *Soient $A$ un anneau intègre, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers de $A$. On suppose que :*

(i) *$A_{\mathfrak{p}_1}$ est noethérien ;*

(ii) *$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ ne contient aucun idéal premier non nul de $A$.*

*Alors, pour tout $t \in A$, on a l'équivalence :*

$$t \neq 0 \iff \exists (w, x_1, x_2) \in A^3, \begin{cases} t\,w = x_1\,x_2 \\ x_1 \notin \mathfrak{p}_1 \\ x_2 \notin \mathfrak{p}_2. \end{cases}$$

*En outre, si $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont de type fini et si $A/\mathfrak{p}_1$ et $A/\mathfrak{p}_2$ vérifient* (C)*, alors $A$ vérifie* (C).

*Démonstration:* la dernière assertion résulte de la première en vertu du lemme 2.1.1 appliqué aux idéaux $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$.

Montrons la première assertion. L'implication $\Leftarrow$ est triviale puisque $A$ est intègre. Réciproquement, soit $t \neq 0$ dans $A$. Comme $A_{\mathfrak{p}_1}$ est noethérien, les idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{p}_1}/(t)$ sont en nombre fini ; ils correspondent à un nombre fini d'idéaux premiers de $A$ contenant $t$ et contenus dans $\mathfrak{p}_1$, que nous noterons $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$. L'hypothèse (ii) implique qu'aucun des $\mathfrak{q}_j$ n'est contenu dans $\mathfrak{p}_2$, ce qui implique que $\bigcap_j \mathfrak{q}_j \not\subset \mathfrak{p}_2$. Soit donc $y \in \left(\bigcap_j \mathfrak{q}_j\right) \setminus \mathfrak{p}_2$. L'image de $y$ dans $A_{\mathfrak{p}_1}/(t)$ appartient à tous les idéaux premiers minimaux donc est nilpotente : il existe $n \in \mathbb{N}$ et $v \in A_{\mathfrak{p}_1}$ tels que $y^n = tv$. Vu la définition du localisé $A_{\mathfrak{p}_1}$, il existe donc $s \in A \setminus \mathfrak{p}_1$ et $w \in A$ tels que $sy^n = tw$, de sorte que $t$ vérifie la propriété voulue (avec $x_1 = s$ et $x_2 = y^n$ : noter que $y^n \notin \mathfrak{p}_2$ puisque $y \notin \mathfrak{p}_2$). ■

### 3.2.1 Remarques.

(1) La condition (i) de l'énoncé peut être affaiblie en « l'espace topologique $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}_1})$ est noethérien » ; plus précisément on n'utilise que le fait que pour tout $t \in A_{\mathfrak{p}_1}$, l'anneau $A_{\mathfrak{p}_1}/(t)$ n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

(2) La condition (ii) est notamment vérifiée si l'on a $\dim A_{\mathfrak{p}_1} = 1$ et $\mathfrak{p}_1 \not\subset \mathfrak{p}_2$ (ou l'inverse).

Voici un corollaire immédiat de 3.2 :

**3.2.2 Corollaire.** *Soit $R$ un anneau intègre vérifiant* (C)*. Alors $R[X]$ vérifie* (C).

*Démonstration:* il suffit d'appliquer la dernière assertion de 3.2 avec $A = R[X]$, $\mathfrak{p}_1 = (X)$ et $\mathfrak{p}_2 = (X - 1)$. ■

**3.3 Lemme.** *Soit $A$ un anneau intègre noethérien, de corps des fractions $K$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de $A$ ; on suppose que $\mathfrak{p}$ n'est pas le plus grand idéal premier de $A$ (autrement dit, $A$ n'est pas un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$).*

*Alors il existe un polynôme $F = X^2 + aX + b \in A[X]$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) *$a \notin \mathfrak{p}$ ;*
(ii) *$b \in \mathfrak{p}$ ;*
(iii) *$F$ est irréductible dans $K[X]$.*

*Démonstration:* l'hypothèse sur $\mathfrak{p}$ entraîne qu'il existe un élément non inversible $\alpha$ de $A \setminus \{0\}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier minimal parmi ceux contenant $\alpha$ : alors $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ (puisque $\alpha \in \mathfrak{q}$), et l'anneau $A_{\mathfrak{q}}$ est local noethérien de dimension 1 (vu la minimalité de $\mathfrak{q}$). Comme $\mathfrak{p}$ n'est pas nul cela entraîne que $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$. Fixons $\beta \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Nous avons ainsi trouvé un idéal premier $\mathfrak{q}$ et deux éléments $\alpha$ et $\beta$ de $A$ vérifiant :

$$\alpha \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}\,;\ \beta \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}\,;\ \dim A_{\mathfrak{q}} = 1.$$

Il résulte du théorème de Krull-Akizuki ([3], §2, n° 5, prop. 5 et cor. 2) que la clôture intégrale de $A_{\mathfrak{q}}$ est un anneau de Dedekind ; si on le localise en l'un de ses idéaux maximaux, on obtient un anneau de valuation discrète de corps des fractions $K$ qui domine $A_{\mathfrak{q}}$. Notons $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation normalisée correspondante. Comme le monoïde $\nu(A \setminus \{0\})$ engendre le groupe $\mathbb{Z}$, il existe $\gamma \in A$ tel que $\nu(\gamma)$ soit impair et positif.

Posons $b := \beta\gamma$. Alors $b \in \mathfrak{p}$ et $\nu(b)$ est impair. Pour $n \in \mathbb{N}$ convenable, l'élément $a := \alpha^n$ vérifie $\nu(a) > \nu(b)/2$ (et évidemment $a \notin \mathfrak{p}$).

Il reste à montrer que $F = X^2 + aX + b$ n'a pas de racine dans $K$. Si $z$ était une telle racine, on aurait $z(z + a) = -b$. Si $\nu(z) < \nu(a)$ ceci entraîne $\nu(z(z + a)) = 2\nu(z) = \nu(b)$, impossible puisque $\nu(b)$ est impair ; sinon, on a $\nu(z) \geq \nu(a)$ donc $\nu(z(z + a)) \geq 2\nu(a) > \nu(b)$ vu le choix de $a$ : nouvelle contradiction. (Les amateurs de polygones de Newton se contenteront de remarquer que celui de $F$ a pour seule pente $-\nu(b)/2$, qui n'est pas un entier). ■

**3.3.1 Remarque.** On voit notamment que, sous les hypothèses de 3.3, l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ n'est pas hensélien, puisque $F$ est irréductible mais a deux racines simples dans le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$.

**3.4 Proposition.** *Soit $A$ un anneau intègre noethérien. On suppose qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $A$ tel que :*

(i) *$\mathfrak{p}$ n'est pas le plus grand idéal premier de $A$ ;*

(ii) *$A/\mathfrak{p}$ vérifie* (C).

*Alors $A$ vérifie* (C).

*Démonstration:* on procède par récurrence sur $h := \dim A_{\mathfrak{p}}$. Si $h = 0$, alors $\mathfrak{p}$ est nul et l'assertion est triviale.

Supposons $h > 0$. Il existe alors un polynôme $F = X^2 + aX + b$ comme dans le lemme 3.3. Soit $B$ la $A$-algèbre $A[X]/(F)$. Alors $B$ est intègre, et est un $A$-module libre de rang 2 ; il suffit donc (lemme 2.1.2) de montrer que $B$ vérifie (C). L'anneau $B/\mathfrak{p}B$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{p})[X]/(X(X+\overline{a}))$ où $\overline{a} \neq 0$ est la classe de $a$ modulo $\mathfrak{p}$. Donc $B$ a deux idéaux premiers distincts au-dessus de $\mathfrak{p}$, à savoir $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}B + xB$ et $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}B + (x + a)B$ où $x$ est la classe de $X$. Comme $B$ est fini libre sur $A$, on a $\dim B_{\mathfrak{p}_1} = \dim B_{\mathfrak{p}_2} = h$. De plus $B/\mathfrak{p}_1 \cong A/\mathfrak{p}$ (l'isomorphisme envoie la classe de $x$ sur 0) et de même $B/\mathfrak{p}_2 \cong A/\mathfrak{p}$ (l'isomorphisme envoie la classe de $x$ sur $-\overline{a}$). En particulier les anneaux $B/\mathfrak{p}_1$ et $B/\mathfrak{p}_2$ vérifient (C). Distinguons deux cas :

(1) $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ ne contient aucun idéal premier non nul de $B$ (condition vérifiée en particulier si $h = 1$) : alors on déduit du lemme 3.2 que $B$ vérifie (C).

(2) il existe un idéal premier $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ non nul : en choisissant $\mathfrak{q}$ minimal on peut supposer que $\dim B_{\mathfrak{q}} = 1$. Pour $i \in \{1, 2\}$ posons $\overline{\mathfrak{p}}_i := \mathfrak{p}_i/\mathfrak{q} \subset \overline{B} := B/\mathfrak{q}$. Alors les localisés $\overline{B}_{\overline{\mathfrak{p}}_i}$ sont de dimension $\leq h - 1$ ; en outre $\overline{\mathfrak{p}}_1 \not\subset \overline{\mathfrak{p}}_2$, donc $\overline{\mathfrak{p}}_2$ n'est pas le plus grand idéal premier de $\overline{B}$ et l'hypothèse de récurrence s'applique à $\overline{B}$. Ainsi $\overline{B}$ vérifie (C), et donc $B$ aussi d'après le cas $h = 1$ déjà établi. ∎

### 3.5 Démonstration du théorème 3.1.

Soit $A$ comme dans l'énoncé. Si $A$ n'est pas local, il suffit d'appliquer 3.4 en prenant pour $\mathfrak{p}$ n'importe quel idéal maximal de $A$ : il est clair que la condition (ii) de la proposition est vérifiée puisque $A/\mathfrak{p}$ est un corps.

Supposons $A$ local mais non hensélien. Il existe alors une $A$-algèbre finie intègre $B_0$ qui n'est pas locale, d'après 2.2.2. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ une famille génératrice finie du $A$-module $B_0$, et pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$ soit $F_i \in A[X_i]$ un polynôme unitaire, en une indéterminée $X_i$, annulant $\xi_i$. Alors $B_0$ est quotient de $B := A[X_1, \ldots, X_s]/(F_1, \ldots, F_s)$ qui est libre de rang fini comme $A$-module.

Nous avons donc trouvé une $A$-algèbre finie libre $B$ et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $B$ tel que $B_0 = B/\mathfrak{p}$ ne soit pas local. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier *minimal* de $B$ contenu dans $\mathfrak{p}$ : alors $B/\mathfrak{q}$ n'est pas local donc vérifie (C). Par suite $B \setminus \mathfrak{q}$ est existentiel positif dans $B$ (2.1.1). Soit $j : A \to B$ le morphisme structural. Comme les éléments de $\mathfrak{q}$ sont diviseurs de zéro dans $B$, que $A$ est intègre et que $B$ est $A$-libre on a $j^{-1}(\mathfrak{q}) = \{0\}$. Donc $A \setminus \{0\} = j^{-1}(B \setminus \mathfrak{q})$ est existentiel positif dans $A$, ce qui achève la démonstration. ∎

### 3.6 Anneaux de fractions.

Une conséquence du théorème 3.1 est que pour les anneaux noethériens intègres, la propriété (C) est « stable par anneaux de fractions ». Plus précisément :

**3.6.1 Corollaire.** *Soit $A$ un anneau intègre noethérien, et soit $S$ une partie multiplicative de $A$. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) $S \not\subset A^\times$ (de sorte que $S^{-1}A \neq A$) *;*

(ii) *$A$ vérifie* (C).

*Alors $S^{-1}A$ vérifie* (C).

*Démonstration:* Si $0 \in S$, alors $S^{-1}A$ est nul et tout est trivial. On suppose donc que $0 \notin S$, de sorte que $S^{-1}A$ est noethérien et intègre. S'il n'est pas local, on conclut par 3.1. Supposons-le local : il est donc de la forme $A_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $A$. Si $\mathfrak{p}$ est nul, alors $S^{-1}A$ est un corps ; si $A$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, alors $S^{-1}A = A$, ce qui est exclu dans le cas (i) et implique le résultat dans le cas (ii). Sinon, nous sommes dans la situation du lemme 3.3, de sorte que $A_{\mathfrak{p}}$ n'est pas hensélien d'après 3.3.1, donc vérifie (C). ∎

# 4 Le cas hensélien

**4.1 Théorème.** *Soient $A$ un anneau noethérien, $\mathfrak{r}$ un idéal non contenu dans le nilradical de $A$. Si la propriété* PHI$(A, \mathfrak{r})$ *de* 2.4 *est vérifiée (et notamment si $A$ est local hensélien excellent, d'après* 2.5*), alors $A$ ne vérifie pas* (C).

*Démonstration:* l'hypothèse sur $\mathfrak{r}$ équivaut à dire que la topologie $\mathfrak{r}$-adique de $A$ n'est pas discrète. Donc $A \setminus \{0\}$ n'est pas fermé dans $A$ pour cette topologie, de sorte que le théorème résulte de la proposition 4.1.1 qui suit. ■

**4.1.1 Proposition.** *Soit $A$ un anneau noethérien, $\mathfrak{r}$ un idéal de $A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) PHI$(A, \mathfrak{r})$ *est vérifiée ;*

(ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute partie existentielle positive de $A^n$ est fermée pour la topologie $\mathfrak{r}$-adique.*

*Démonstration:* (i) ⇒ (ii) : supposons PHI$(A, \mathfrak{r})$ vérifiée, et soit $Z \subset A^n$ un sous-ensemble existentiel positif. Alors $Z$ est réunion finie d'ensembles de la forme

$$\left\{ \underline{t} \in A^n \mid (\exists\, \underline{x})\ F_1(\underline{t}, \underline{x}) = \ldots = F_s(\underline{t}, \underline{x}) = 0 \right\}$$

où chaque $F_j$ est un polynôme à coefficients dans $A$ en $n+r$ variables (où $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_r)$). Pour voir que $Z$ est fermé, on peut donc supposer qu'il est de la forme ci-dessus.

Soit $\underline{t} \in A^n$ adhérent à $Z$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe donc $(\underline{t}(q), \underline{x}(q)) \in A^{n+r}$ tels que $\underline{t} - \underline{t}(q) \in \mathfrak{r}^q A^{n+r}$ et que $F_j(\underline{t}(q), \underline{x}(q)) = 0$ pour tout $j$. Comme les $F_j$ sont à coefficients dans $A$, on a donc $F_j(\underline{t}, \underline{x}(q)) \in \mathfrak{r}^q$. Autrement dit, le système d'équations

$$F_j(\underline{t}, X_1, \ldots, X_r) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

en les inconnues $X_i$ admet une solution modulo $\mathfrak{r}^q$ pour tout $q$. L'hypothèse implique donc qu'il a une solution dans $A^r$, donc que $\underline{t} \in Z$, cqfd.

(ii) ⇒ (i) : supposons (ii), et reprenons les notations de 2.4. On a donc une famille finie $S = (F_j)_{j=1,\ldots,s}$ de polynômes en $r$ indéterminées à coefficients dans $A$. Supposons que $\mathrm{sol}(S, A(q)) \neq \emptyset$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et considérons l'ensemble $Z \subset A^s$ image de l'application $(F_1, \ldots, F_s) : A^r \to A^s$. Alors $Z$ est existentiel positif, et l'hypothèse sur $S$ signifie que $0 \in A^s$ est adhérent à $Z$. Comme $Z$ est fermé d'après (ii), on conclut que $0 \in Z$, donc que $\mathrm{sol}(S, A) \neq \emptyset$. ■

### 4.2 Application à une question de D. Popescu.

En combinant 4.1 et 3.1, on obtient :

**4.2.1 Corollaire.** *Soient $A$ un anneau intègre noethérien, $\mathfrak{r}$ un idéal non nul de $A$. Si* PHI$(A, \mathfrak{r})$ *est vérifiée, alors $A$ est local hensélien.* ■

**4.2.2 Remarque.** En utilisant la remarque 2.4.1, on en déduit plus généralement que si $A$ est un anneau noethérien, $\mathfrak{r}$ un idéal de $A$ non contenu dans un idéal premier minimal, et si $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{r})$ est vérifiée, alors $A$ est semi-local hensélien (donc produit d'anneaux locaux henséliens).

Popescu demandait dans [12] si tout couple hensélien $(A, \mathfrak{r})$ (*cf.* 2.4.1 (1)(v)) tel que l'homomorphisme de complétion $A \to \widehat{A}$ soit régulier vérifie l'approximation forte, et Spivakovsky [15] a montré par un exemple que la réponse est en général négative. Le résultat ci-dessus montre que la réponse est *toujours* négative, sauf dans le cas semi-local (où elle est affirmative, au moins lorsque $\mathfrak{r}$ est le radical ; j'ignore ce qui se passe par exemple si $A$ est local hensélien excellent et si $\mathfrak{r}$ est différent de l'idéal maximal).

On a une réciproque partielle à 4.1 :

**4.3 Théorème.** *Soit $A$ un anneau local noethérien hensélien,* intègre et de dimension 1, *d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Si* $\mathrm{PHI}(A, \mathfrak{m})$ *n'est pas vérifiée, alors $A$ vérifie* (C).

*Démonstration:* par hypothèse il existe un système $S = (F_j)_{j=1,\dots,s}$ comme dans 2.4 qui a un zéro modulo $\mathfrak{m}^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ mais n'a pas de zéro dans $A^r$.

Montrons qu'il existe un tel système réduit à un seul polynôme : en effet, comme $\dim A > 0$, le corps des fractions $K$ de $A$ n'est pas algébriquement clos (il admet une valuation discrète non triviale, cf. la preuve de 3.3) et il existe donc un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_s]$ ayant $(0, \dots, 0)$ pour seul zéro dans $K^s$. On peut naturellement prendre $P$ dans $A[\underline{X}]$ ; le polynôme composé $F := P(F_1, \dots, F_s)$ a alors un zéro modulo $\mathfrak{m}^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ mais n'a pas de zéro dans $A^r$.

Montrons alors que pour $x \in A$ quelconque on a l'équivalence :

$$x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists t)(\exists w)\; xw = F(t).$$

L'implication $\Leftarrow$ résulte du fait que $F$ n'a pas de zéro dans $A^r$ ; réciproquement, si $x \neq 0$, l'anneau $A/xA$ est artinien donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^q \subset xA$ ; vu le choix de $F$, il existe $t \in A$ tel que $F(t) \in \mathfrak{m}^q$, donc $F(t) \in xA$, cqfd. ■

### 4.4 Un exemple.

Nous donnons ici un exemple, tiré de [1], d'anneau de valuation discrète hensélien qui ne vérifie pas (PHI). Soit $k$ un corps de caractéristique $p > 0$. Choisissons un élément $\xi$ de $k[[T]]$ qui est transcendant sur $k(T)$ ; posons $U = \xi^p$, et $A_0 := k[[T]] \cap k(T, U)$. Enfin soit $A$ le hensélisé de $A_0$. On vérifie facilement que $A_0$ et $A$ sont des anneaux de valuation discrète, de complété $k[[T]]$. De plus, par construction, $\xi^p \in A_0$ mais $\xi \notin A_0$ et donc $\xi \notin A$ puisque le corps des fractions de $A$ est séparable sur celui de $A_0$. L'équation $X^p = U$ n'a donc pas de solution dans $A$, mais en a une dans $A/(T^q)$ pour tout $q > 0$ (à savoir la classe d'un polynôme en $T$ congru à $\xi$ modulo $T^q$).

En particulier $A$ vérifie (C) : explicitement, pour tout $f \in A$, on a $f \neq 0$ si et seulement si il existe $g$ et $h$ dans $A$ tels que $fg = h^p - U$.

# 5 Anneaux noethériens non intègres

## 5.1 Notations.

La condition (C), à la connaissance de l'auteur, n'a été utilisée dans la littérature que dans le cas intègre ; pour les anneaux plus généraux, nous nous contenterons donc de quelques remarques élémentaires. Notons d'abord que pour un anneau non intègre il est naturel de considérer, outre $A \setminus \{0\}$, l'ensemble $A^{\mathrm{reg}}$ des éléments *réguliers* (c'est-à-dire « non diviseurs de zéro ») de $A$, qui est contenu dans $A \setminus \{0\}$ si $A$ n'est pas nul et lui est égal si $A$ est intègre. Ceci conduit à envisager, pour un anneau $A$ donné, la condition

($\mathrm{C}^{\mathrm{reg}}$) « l'ensemble $A^{\mathrm{reg}}$ est existentiel positif dans $A$ »

qui est équivalente à (C) si $A$ est intègre. Nous utiliserons en outre la condition

(Q) « tout quotient intègre de $A$ vérifie (C) ».

**5.2 Proposition.** *Soit $A$ un anneau noethérien. On fait l'une des hypothèses suivantes :*

(i) *$A$ vérifie* (C) *;*

(ii) *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à $A$, le quotient $A/\mathfrak{p}$ vérifie* (C)*.*

*Alors $A$ vérifie* ($\mathrm{C}^{\mathrm{reg}}$)*, et vérifie* (C) *s'il est* réduit*.*

*Démonstration:* soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux premiers associés à $A$. Par définition, chaque $\mathfrak{p}_i$ est l'annulateur d'un élément $\alpha_i$ de $A$ ; on sait en outre ([2], chapitre IV, §1, n° 1, cor. 3 de la prop. 2) que $A \setminus A^{\mathrm{reg}}$ est la réunion des $\mathfrak{p}_i$, de sorte que

$$A^{\mathrm{reg}} = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus \mathfrak{p}_i).$$

Dans le cas (ii), chaque $A \setminus \mathfrak{p}_i$ est existentiel positif par 2.1.1, et il en est de même dans le cas (i) puisque $A \setminus \mathfrak{p}_i = \{t \in A \mid t\,\alpha_i \neq 0\}$. Donc $A$ vérifie ($\mathrm{C}^{\mathrm{reg}}$). Si $A$ est réduit, il suffit de remarquer que les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers minimaux de $A$ et que $A \setminus \{0\}$ est la réunion des $A \setminus \mathfrak{p}_i$. ∎

**5.3 Théorème.** *Soit $A$ un anneau noethérien vérifiant* (Q)*, et soit $S$ une partie multiplicative de $A$. Alors :*

(i) *$A$ vérifie* (C) *;*

(ii) *$S^{-1}A$ vérifie* (Q) (et donc (C), d'après (i)).

*Démonstration:* (i) d'après [2] (chap. IV, §1, n° 4, théorème 1) il existe une suite d'idéaux

$$A = I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n = \{0\}$$

et des idéaux premiers $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$ tels que, pour tout $j$, le $A$-module $I_j/I_{j+1}$ soit isomorphe à $A/\mathfrak{p}_j$ ; fixons pour chaque $j$ un élément $\alpha_j$ de $I_j$ engendrant $I_j/I_{j+1}$. Pour tout $x \in A$, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned} x \neq 0 &\iff \bigvee_{j=0}^{n-1} (x \in I_j \setminus I_{j+1}) \\ &\iff \bigvee_{j=0}^{n-1} (\exists\, t)\,(\exists\, u)(x = t\alpha_j + u \;\wedge\; t \in A \setminus \mathfrak{p}_j \;\wedge\; u \in I_{j+1}) \end{aligned}$$

d'où la conclusion puisque $A \setminus \mathfrak{p}_j$ et $I_{j+1}$ sont existentiels positifs, d'après l'hypothèse sur $A$ et le lemme 2.1.1.

(ii) Les quotients intègres de $S^{-1}A$ sont des anneaux de fractions de quotients intègres de $A$, donc le cas (ii) de 3.6.1 entraîne que $S^{-1}A$ vérifie (Q). ∎

Rappelons qu'un anneau $A$ est un *anneau de Jacobson* si tout idéal premier de $A$ est intersection d'idéaux maximaux.

**5.4 Corollaire.** *Tout anneau de Jacobson noethérien vérifie* (Q).

*Par suite, d'après* 5.3, *tout anneau de fractions d'un anneau de Jacobson noethérien vérifie* (C).

*En particulier :*

- *tout anneau artinien vérifie* (C) *;*
- *soit $k$ un corps ou un anneau de Dedekind ayant une infinité d'idéaux maximaux ; alors toute $k$-algèbre essentiellement de type fini vérifie* (C).

*Démonstration:* Il est clair qu'un anneau de Jacobson intègre et local est un corps, de sorte que, d'après 3.1, tout anneau de Jacobson *intègre* et noethérien vérifie (C). Comme il est non moins clair qu'un quotient d'un anneau de Jacobson est de Jacobson, on en déduit la première assertion, qui entraîne les autres. ∎

# 6 Fonctions analytiques.

Pour les notions de base sur les espaces analytiques et les espaces de Stein, le lecteur pourra consulter [7]. Un espace analytique sera toujours supposé séparable (en particulier l'ensemble de ses composantes irréductibles est dénombrable) et de dimension finie.

Parmi les espaces de Stein on compte notamment les espaces $\mathbb{C}^n$, les polydisques, et les sous-espaces analytiques fermés de ceux-ci.

Si $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace analytique, nous noterons $\mathscr{H}(X)$ l'anneau $H^0(X, \mathscr{O}_X)$ des fonctions holomorphes globales sur $X$.

**6.1 Proposition.** *Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace analytique de Stein, irréductible et réduit, de dimension $> 0$, et soit $P$ un point de $X$. Il existe un sous-espace fermé $Y$ de $X$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) *$P \notin Y$, et $Y$ est disjoint du lieu singulier de $X$ ;*

(ii) *$Y$ est irréductible et réduit, et son idéal $\mathscr{I}_Y \subset \mathscr{O}_X$ est localement principal ;*

(iii) *l'idéal* $\mathfrak{p} = H^0(X, \mathscr{I}_Y)$ *de l'anneau* $A := \mathscr{H}(X)$ *formé des fonctions holomorphes sur* $X$ *nulles sur* $Y$ *est de type fini ;*

(iv) *avec les notations de* (iii), *l'anneau* $A_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau de valuation discrète.*

*Démonstration:* : soit $Z \subset X$ le sous-espace fermé réunion du lieu singulier de $X$ et du point $P$. Vu les hypothèses sur $X$ il existe un point $Q \in X \setminus Z$. Comme $X$ est de Stein il existe une fonction holomorphe $f$ sur $X$ qui vaut 1 sur $Z$, 0 en $Q$ et dont la différentielle en $Q$ n'est pas nulle. Le sous-espace fermé $Y'$ de $X$ défini par $f = 0$ est un diviseur contenu dans $X \setminus Z$, et lisse au voisinage de $Q$. Soit $Y$ l'unique composante irréductible de $Y'$ contenant $Q$. Il est clair que $Y$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iv), et la propriété (iii) résulte du lemme 6.1.2 ci-dessous (appliqué à $\mathscr{F} = \mathscr{I}_Y$). ■

**6.1.1 Notations.** Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace analytique, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Pour tout $x \in X$ notons $\mathscr{F}_x$ le $\mathscr{O}_{X,x}$-module de type fini fibre de $\mathscr{F}$ en $x$, et $\mathscr{F}(x)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$. Le lemme de Nakayama implique que $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{F}(x)$ est le plus petit entier $r$ tel qu'il existe un voisinage $U$ de $x$ et une surjection $\mathscr{O}_U^r \to \mathscr{F}_{|U}$.

**6.1.2 Lemme.** *Soit* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un espace analytique de Stein, et soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-module cohérent. Pour que le* $\mathscr{H}(X)$*-module* $H^0(X, \mathscr{F})$ *soit de type fini, il faut et il suffit que la fonction* $x \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{F}(x)$ *soit bornée sur* $X$.

*Démonstration:* la nécessité est évidente : si $H^0(X, \mathscr{F})$ est engendré par $r$ éléments, alors la fonction en question est majorée par $r$.

Pour montrer la suffisance, on procède par récurrence sur la dimension $d$ du support de $\mathscr{F}$, avec la convention $\dim(\emptyset) = -1$. Si $d = -1$ alors $\mathscr{F}$ est nul et il n'y a rien à démontrer.

Soit $r$ un majorant de la fonction $x \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{F}(x)$. Comme l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathrm{Supp}\,(\mathscr{F})$ est localement fini, il existe un sous-espace fermé discret $Z \subset X$ qui rencontre toutes ces composantes. Pour chaque $z \in Z$, soit $(s_{1,z}, \ldots, s_{r,z})$ une famille génératrice à $r$ éléments de $\mathscr{F}(z)$. On obtient donc $r$ sections globales de la restriction de $\mathscr{F}$ à $Z$ ; comme $X$ est de Stein, elles se relèvent en $r$ sections $s_1, \ldots, s_r$ de $\mathscr{F}$ sur $X$, définissant un morphisme $\varphi : \mathscr{O}_X^r \to \mathscr{F}$. Notons $\mathscr{F}_1$ le conoyau de $\varphi$, qui est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Par construction, $\varphi$ est surjectif au voisinage de $Z$, de sorte que $\mathrm{Supp}\,(\mathscr{F}_1)$ ne contient aucune composante de $\mathrm{Supp}\,(\mathscr{F})$. Donc $\dim \mathrm{Supp}\,(\mathscr{F}_1) < d$, et par hypothèse de récurrence $H^0(X, \mathscr{F}_1)$ est un $\mathscr{H}(X)$-module de type fini (noter que comme $\mathscr{F}_1$ est un quotient de $\mathscr{F}$ on a $\dim \mathscr{F}_1(x) \leq \dim \mathscr{F}(x)$ pour tout $x \in X$). Comme $X$ est de Stein, la suite exacte $\mathscr{O}_X^r \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_1 \to 0$ donne une suite exacte $\mathscr{H}(X)^r \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}_1) \to 0$ de $\mathscr{H}(X)$-modules, qui montre que $H^0(X, \mathscr{F})$ est de type fini. (L'argument montre plus précisément qu'il est engendré par $r(d+1)$ éléments). ■

**6.2 Théorème.** *Soit* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un espace analytique de Stein, irréductible et réduit. Alors l'anneau* $\mathscr{H}(X)$ *vérifie* (C).

*Démonstration :* posons $A = \mathscr{H}(X)$, et procédons par récurrence sur $d := \dim X$. Si $d = 0$, alors $A = \mathbb{C}$. Si $d > 0$, soient $P \in X$ et $Y \subset X$ comme dans la proposition 6.1. On note $\mathfrak{p}$ l'idéal de $Y$ dans $A$, et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal du point $P$. Appliquons le lemme 3.2 avec $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}$. La proposition 6.1 assure que les conditions (i) et (ii) de 3.2 sont satisfaites (cf. la remarque 3.2.1 (2)). De plus $\mathfrak{p}_1$ est de type fini d'après 6.1 (iii), et il en est de même de $\mathfrak{p}_2$ d'après le lemme 6.1.2. L'anneau $A/\mathfrak{p}_1$ s'identifie à $\mathscr{H}(Y)$ donc vérifie (C) par hypothèse de récurrence, et $A/\mathfrak{p}_2 \cong \mathbb{C}$ vérifie trivialement (C), donc le lemme 3.2 donne bien le résultat voulu. ∎

# Références


[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud: *Néron models*, tome 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3).* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] N. Bourbaki: *Éléments de mathématique. Fascicule XXVIII. Algèbre commutative. Chapitres 3 et 4.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1293. Hermann, Paris, 1961.

[3] N. Bourbaki: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7 : Diviseurs.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1314. Hermann, Paris, 1965.

[4] M. Davis, Y. Matijasevič et J. Robinson: *Hilbert's tenth problem : Diophantine equations : positive aspects of a negative solution.* Dans *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pages 323–378. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.

[5] J. Demeyer: *Diophantine Sets over Polynomial Rings and Hilbert's Tenth Problem for Function Fields.* Universiteit Gent. Thèse, 2007.

[6] J. Denef et L. Lipshitz: *Ultraproducts and approximation in local rings. II.* Math. Ann., 253(1) : 1–28, 1980.

[7] H. Grauert et R. Remmert: *Theory of Stein spaces.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.

[8] A. Grothendieck: *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (24) : 1–231, 1965.

[9] A. Grothendieck: *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (32) : 1–361, 1967.

[10] H. Matsumura: *Commutative ring theory*, tome 8 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[11] G. Pfister et D. Popescu: *Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe.* Invent. Math., 30(2) : 145–174, 1975.

[12] D. Popescu: *General Néron desingularization and approximation.* Nagoya Math. J., 104: 85–115, 1986.

[13] M. Raynaud: *Anneaux locaux henséliens.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[14] A. Shlapentokh: *Diophantine classes of holomorphy rings of global fields.* J. Algebra, 169(1) : 139–175, 1994.

[15] M. Spivakovsky: *Non-existence of the Artin function for Henselian pairs.* Math. Ann., 299(4) : 727–729, 1994.

[16] M. Spivakovsky: *A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms.* J. Amer. Math. Soc., 12(2) : 381–444, 1999.

[17] R. G. Swan: *Néron-Popescu desingularization.* Dans *Algebra and geometry (Taipei, 1995)*, tome 2 de *Lect. Algebra Geom.*, pages 135–192. Int. Press, Cambridge, MA, 1998.